

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение
Самарской области средняя общеобразовательная школа имени Героя
Советского Союза И.М.Пенькова с. Марьевка муниципального района
Пестравский
Самарской области

ПРОВЕРЕНО

Зам. директора по УВР

Мешалкина И. С.
«29» августа 2025 г.

УТВЕРЖДЕНО

Директор ГБОУ СОШ с.
Марьевка

Внуков В.В.
Приказ №77 от «29» августа
2025 г.

Рабочая программа элективного курса

Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения

Класс 10-11

Количество часов по учебному плану: 1 час в неделю (34 часа в год)

Автор программы: Штанова Н.Б.

РАССМОТРЕНО

на заседании МО учителей

математики, физики, информатики

Протокол №1 от «29» августа 2025 г.

Руководитель МО Штанова

Пояснительная записка

Рабочая программа составлена на основе программы С.А. Гомонова «Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения».

Нормативно – правовые документы, на основании которых разработана программа:

- Федеральный закон от 29.12.2012 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (редакция от 31.12.2014 г. с изменениями от 06.04.2015 г.).
- Приказ МОР № 1089 от 05.03.2004 с изменениями и дополнениями от 23.06.2015 г. «Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального, общего, основного общего и среднего (полного) общего образования».
- Приказ МО РФ от 19.05.98 г. № 1236 «Об утверждении временных требований к обязательному минимуму содержания основного общего образования».
- Положение о рабочей программе ФГОС, утвержденное приказом МОУ «СОШ № 42» г. Магнитогорска от 29.08.2014г. № 85
- Учебный план МОУ «СОШ № 42» г. Магнитогорска на 2018-2019 учебный год.

Элективный курс «Замечательные неравенства» рассчитан на 68 часов для учащихся 10-11 классов, которым интересна математика и ее приложения, и которым захочется глубже и основательнее познакомиться с ее методами и идеями.

Неравенства играют фундаментальную роль в большинстве разделов современной математики, без них не может обойтись ни физика, ни математическая статистика, ни экономика. Предлагаемый курс освещает намеченные, но совершенно не проработанные в общем курсе школьной математики вопросы, начиная от доказательства простейших числовых неравенств, до обоснования «замечательных» неравенств Коши-Буняковского, Чебышева и Иенсона. Навыки в использовании этих неравенств необходимы всякому ученику, желающему хорошо подготовиться к решению задач самого высокого уровня.

Цель курса: изучение избранных классов неравенств с переменными и научное обоснование методов их получения, а также практическое применение изученного теоретического материала.

Задачи курса:

- рассмотреть примеры на установление истинности числовых неравенств и основные методы решения данных задач;
- рассмотреть частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение;
- рассмотреть метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств;
- познакомить учащихся с неравенством Коши для произвольного числа переменных;
- доказать неравенство Коши-Буняковского и показать его применение для решения задач;
- познакомить учащихся с неравенством Чебышева и некоторыми его обобщениями;
- дать представление о математике как общекультурной ценности на примерах применения неравенств в математической статистике, экономике, для решения некоторых классов задач оптимизационного характера без применения средств дифференциального исчисления.

Данный элективный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся, использует целый ряд межпредметных связей.

Содержание программы учебного курса

10 класс

1. Числовые неравенства и их свойства

Понятие положительного и отрицательного числа, число нуль. Основные законы сложения и умножения действительных чисел. Свойства суммы и произведения положительных чисел. Понятие «больше» для действительных чисел, его геометрическая интерпретация и свойства. Понятия «меньше», « не больше», «не меньше» для действительных чисел и их свойства. Числовые неравенства.

2. Основные методы установления истинности числовых неравенств с переменными.

Сравнение двух чисел – значений числовых выражений « по определению», путем сравнения их отношения с единицей, путем сравнения их степеней, путем сравнения их с промежуточными числами (числом), метод введения вспомогательной функции, метод использования «замечательных» неравенств.

3. Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными.

Частные случаи неравенства Коши, их обоснование и применение. Неравенство-следствие. Равносильные неравенства. Равносильные задачи на доказательство или опровержение неравенств. Методы установления истинности неравенств с переменными: метод «от противного», метод анализа, метод усиления и ослабления, метод подстановки, метод использования тождеств, метод введения вспомогательных функций, метод понижения степеней выражений, образующих левую и правую части неравенств.

4. Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных.

Индукция вообще и в математике в частности. Система аксиом Дж. Пеано. Схема применения принципа математической индукции. Некоторые модификации метода математической индукции. Две теоремы о сравнении соответствующих членов двух последовательностей с помощью сравнения разности или отношения двух соседних членов одной последовательности с разностью или отношением двух членов другой последовательности. Примеры. Неравенство Коши для произвольного числа переменных. Некоторые неравенства, эквивалентные неравенству Коши.

5. Неравенство Коши-Буняковского и его применение для решения задач.

Формулировка и обоснование теоремы, устанавливающей соотношение Коши-Буняковского и дающая критерий реализации этого соотношения в варианте равенства. Геометрическая интерпретация неравенства Коши-Буняковского. Векторный вариант записи этого неравенства.

6. Неравенства подсказывают методы их обоснования.

Метод Штурма. Использование симметричности, однородности цикличности левой и правой частей неравенств. Геометрические неравенства, устанавливающие соотношения между длинами сторон треугольника.

11 класс

7. Средние степенные величины.

Средние величины в школьном курсе математики, физики. Многообразие «средних». Среднее арифметическое, среднее геометрическое и соотношение между ними в случае двух параметров. Геометрическая интерпретация. Четыре средние линии трапеции.

8. Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения.

Неравенство Чебышева: простейший вариант и его обобщение, порожденное понятием одномонотонной последовательности. Неравенства, обобщающие как неравенство Чебышева, так и неравенство Коши-Буняковского.

9. Генераторы замечательных неравенств.

Свойства квадратичной функции – источник простейших неравенств. Неравенство треугольника. Свойства одномонотонных последовательностей – источник замечательных неравенств. Неравенство Иенсона.

10. Применение неравенств.

Задача Дидоны (упрощенный вариант) и другие задачи на оптимизацию. Поиск наибольшего и наименьшего значений функции с помощью замечательных неравенств.

Тематическое планирование

10 класс

№ п/п	Содержание	Количество часов	Контроль
1	Числовые неравенства и их свойства	3	Сам. работа
2	Основные методы установления истинности числовых неравенств с переменными.	5	Сам работа
3	Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными.	9	Сам работа
4	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных	5	Сам работа
5	Неравенство Коши-Буняковского и его применение для решения задач	4	Сам работа
6	Неравенства подсказывают методы их обоснования	8	Сам работа
	Итого	34	6

11 класс

№ п/п	Содержание	Количество часов	Контроль
1	Средние степенные величины	10	Сам работа
2	Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения	3	Сам работа
3	Генераторы замечательных неравенств	14	Сам работа
4	Применение неравенств	7	Конт работа
	Итого	34	4

Календарно-поурочное планирование

10 класс

№ п/п	Тема	Кол-во часов	Дата
I	Числовые неравенства и их свойства	3 ч	
1	Понятия «больше» и «меньше» для действительных чисел.	1	
	Строгие числовые неравенства и их простейшие свойства.	1	
2	Понятие нестрогого неравенства. Свойства числовых неравенств.	1	
3			
II	Основные методы установления истинности числовых неравенств с переменными.	5 ч	
4	Сравнение значений двух числовых выражений «по определению» и с помощью сравнения с единицей их отношения.	1	
5	Сравнение значений числовых выражений с помощью сопоставления значений степеней этих выражений и методом оценок.	1	
6	Метод вспомогательной функции и использования ее свойств.	1	
7	Решение задач на доказательство числовых неравенств.	1	
8	Установление соотношений между значениями числовых выражений.	1	
III	Основные методы решения задач на установление истинности неравенств с переменными.	9 ч	
9	Неравенства с переменными, основные понятия и свойства.	1	
10	Методы анализа и синтеза в решении задач на установление истинности неравенств с переменными.	1	
	Метод «от противного» и метод использования тождеств в решении задач на установление истинности неравенств с переменными.	1	
11	Метод оценивания и метод введения новых переменных.	1	
	Метод вспомогательных функций.	1	
12	Методы упрощения задач на доказательство неравенств с переменными и метод моделей.	1	
13	Некоторые частные случаи неравенства Коши и их применение.	1	
14	Применение неравенства Коши для нахождения наибольших и наименьших значений функции.	1	
15	Решение задач на доказательство неравенств с переменными.	1	
16			
17			
IV	Метод математической индукции и его применение к доказательству неравенств. Неравенство Коши для произвольного числа переменных	5 ч	
18	Полная индукция – метод перебора всех вариантов и ее	1	

19	применение к решению задач.		
	Аксиома, принцип и метод математической индукции и их применение при доказательстве неравенств с переменными.	1	
20	Теоремы о сравнениях соответствующих членов двух последовательностей.	1	
	Неравенство Коши для произвольного числа переменных и его применение к решению задач.	1	
21	Неравенство Коши для произвольного числа переменных и применение его для получения новых неравенств и решения задач.	1	
22			
V	Неравенство Коши-Буняковского и его применение для решения задач	4 ч	
23	Неравенство Коши-Буняковского и условия его реализации в варианте равенства.	1	
24	Тождество Лагранжа.	1	
25	Векторный вариант записи неравенства Коши-Буняковского и тригонометрические подстановки.	1	
26	Применение неравенства Коши-Буняковского к решению задач.	1	
VI	Неравенства подсказывают методы их обоснования	8 ч	
27	Метод выравнивания значений переменных (метод Штурма).	1	
28	Метод выравнивания значений переменных (завершение)	1	
29	Метод раздвигания значения переменных.	1	
30	Использование для доказательств неравенств с переменными свойства симметричности функций.	1	
31	Использование для доказательства неравенств с переменными свойства однородности функций. Условные тождества.	1	
32	Некоторые методы доказательства циклических неравенств.	1	
33	Простейшие приемы установления геометрических неравенств.	1	
34	Условные тождества и условные неравенства.	1	
Итого: 34 часа			

11 класс

№ п/п	Тема	Кол-во часов	Дата
VII	Средние степенные величины	10 ч	
1	Средние арифметическое, геометрическое, гармоническое и квадратическое в случае двух и большего числа параметров. Соотношения между ними.	1	
2	Соотношения между средним гармоническим, геометрическим, арифметическим и квадратическим в общем случае.	1	
	Геометрические интерпретации средних величин.	1	
3	Четыре средних линии трапеции. Среднее арифметико-геометрическое Гаусса.	1	
4	Симметрическое среднее. Теорема Мюрхеда.	1	
5	Круговые неравенства, методы их доказательства и	1	

6	опровержения.		
	Среднее арифметическое взвешенное и его свойства.	1	
7	Средние степенные, их свойства и применение.	1	
8	Средние взвешенные степенные, их свойства и	1	
9	применение.		
10	Решение задач по материалу главы VII.	1	
VIII	Неравенство Чебышева и некоторые его обобщения	3 ч	
11	Неравенство Чебышева, его доказательство и простейшие обобщения.		
12	Дальнейшие обобщения неравенства Чебышева и неравенства Коши-Буняковского.		
13	Решение задач на применение обобщений неравенства Чебышева.		
IX	Генераторы замечательных неравенств	14 ч	
14	Линейная и квадратичная функции и неравенства с переменными.	1	
15	Неравенства геометрического происхождения. Определенный интеграл и методы трапеций и треугольников (теорема 1).	1	
16	Свертка двух одномонотонных последовательностей и ее свойства для двучленных и трехчленных последовательностей. Теорема 2 и ее применение.	1	
17	Некоторые свойства одномонотонных последовательностей и их свертки. Теорема 3.	1	
18	Использование теоремы 3 для решения задач на установление неравенств с переменными.	1	
19	Доказательство неравенства Чебышева с помощью теоремы 3 и другие применения этой теоремы.	1	
20	Одномонотонность конечного числа последовательностей, их свертка и ее свойство.	1	
21	Центр масс конечной системы материальных точек и его свойства. Выпуклые множества.	1	
22	Надграфик и подграфик функции, заданной на промежутке.	1	
23	Понятия выпуклой и вогнутой функции на промежутке. Неравенство Йенсона.	1	
24	Неравенство Йенсона.	1	
25	Достаточные условия выпуклости и вогнутости функции на промежутке, примеры выпуклых и вогнутых функций.	1	
26	Неравенство Коши-Гельдера.	1	
27	Неравенства Минковского.	1	
X	Применение неравенств	7 ч	
28	Неравенства в финансовой математике.	1	
29	Задача Дидоны и другие задачи на оптимизацию.	1	
30	Решение задач на максимум и минимум с помощью замечательных неравенств.	1	
31	Теоремы о постоянной сумме и постоянном произведении и их применение к решению задач.	1	
32	Урок решения задач.	1	

33	Итоговая контрольная работа.	1	
34	Замечательные неравенства в задачах математических олимпиад школьников.	1	
	Итого: 34 часа		

Требования к уровню подготовки обучающихся

В результате изучения курса учащиеся должны

- иметь ясное представление о положительных, отрицательных числах и о числе нуль, а также свойствах, связанных с операциями арифметического сложения и умножения действительных чисел;
- знать и уметь использовать понятия «не больше» и «не меньше» для действительных чисел, применять такие свойства ряда элементарных функций, как возрастание и убывание, свойства числовых неравенств;
- уметь применять переходы к сравнению дополнений до единицы и к сравнению расстояний до ближайшего целого числа, а также переход к алгебраическим выражениям;
- знать и уметь использовать для сравнения значений числовых выражений свойство монотонности степенной функции;
- знать неравенство Коши и уметь применять его для решения задач;
- владеть понятиями неравенство с переменными, решение неравенства, неравенство-следствие, система неравенств, совокупность неравенств, выполнять геометрическую интерпретацию понятий;
- применять такие методы установления истинности неравенств, как метод синтеза и метод анализа, метод «от противного» и метод использования тождеств;
- уметь доказывать неравенство Коши для трех и четырех переменных, применять неравенство Коши для обоснования неравенств с переменными;
- знать метод перебора всех вариантов и уметь применять его при доказательстве неравенств с переменными;
- иметь представление о системе аксиом Пеано; наизусть знать аксиому математической индукции;
- иметь представление о нескольких вариантах метода математической индукции и уметь их использовать при решении задач;
- знать и уметь доказывать неравенство Коши-Буняковского двумя способами (методом вспомогательной функции и с помощью тождества Лагранжа); уметь применять неравенство при решении задач;
- иметь ясное представление о методе Штурма доказательства неравенств с переменными;
- знать определение симметрической функции и симметрического неравенства; уметь использовать для доказательства неравенства его симметричность;
- знать общее определение средней величины произвольного конечного числа действительных чисел; иметь представление о применении в физике средних величин;
- знать и уметь использовать среднее арифметическое взвешенное при решении задач;
- знать и уметь доказывать теорему о соотношении между четырьмя средними в случае двух переменных;
- знать неравенство Чебышева, его доказательство и простейшие обобщения, уметь применять в решении задач;
- знать и уметь использовать основные свойства линейной и квадратичной функций для обоснования и получения неравенств с переменными;
- знать неравенство треугольника и теорему косинусов и уметь использовать их для обоснования и получения неравенств.

Характеристика контрольно-измерительных материалов

Система оценивания результатов самостоятельной работы:

- для получения отметки «3» достаточно верно, с полными обоснованиями, решить одну из двух предложенных задач. Если работа содержит только 1 задачу, то отметка «3» может быть выставлена в том случае, если присутствуют все основные шаги в решении задачи, но решение не закончено.
- для получения отметки «4» необходимо правильно решить обе предложенные задачи. Но может быть допущена вычислительная ошибка, недостаточные обоснования или их отсутствие. Если работа содержит только одну задачу, то отметку «4» можно поставить, если задача решена, но недостаточные (или отсутствуют) обоснования шагов решения.
- для получения отметки «5» необходимо правильно и с полным обоснованием решить все предложенные задачи.

Доклады и рефераты учащихся оцениваются отметкой «зачет», если обучающийся раскрыл суть излагаемого материала.

Учебно-методическое обеспечение

1. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10-11 классы. Элективные курсы. Учебное пособие для профильных классов общеобразовательных учреждений.- М.: Дрофа, 2005
2. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. 10-11 классы. Методические рекомендации.- М.: Дрофа, 2005
3. Элективные курсы в профильном обучении под редакцией А.Г.Каспржака. Образовательная область «Математика». Министерство образования РФ.- Национальный фонд подготовки кадров.- М.:Вита-Пресс, 2004